

اعتبار در جهان‌های ممکن

اسداله فلاحی^۱

لطفاله نبوی^۲

چکیده

قضایا و قواعد منطق موجهات، در جهان‌های ممکن، معتبرند اما قضایای منطق ربط، در جهان‌های منطقی، و قواعد آن، در وضعیت‌ها اعتبار دارند. روبرت مایر، در سال ۱۹۷۴، به کمک ادات‌های صدق و کذب و یلهم آکرمان، نظامی در منطق ربط طراحی کرد که قضایا و قواعد آن، هر دو، در وضعیت‌ها معتبر بودند و به این وسیله، عدم تقارن موجود در منطق ربط میان قضایا و قواعد را از میان برد. در این مقاله، با معرفی نوع جدیدی از ادات‌های صدق و کذب، نظامی منطقی بر پایه منطق ربط طراحی کرده‌ایم که قضایا و قواعد آن در جهان‌های ممکن معتبرند. چنین نظامی، علاوه بر حفظ تقارن، به رفع ناسازگاری موجود میان منطق جدید و منطق ربط می‌انجامد زیرا مانند منطق جدید، جهان‌های ممکن را معیار اعتبار قرار می‌دهد.

کلید واژه‌ها: منطق ربط، صدق‌نگهداری، جهان ممکن، وضعیت، منطق PWR

۱. استادیار دانشگاه زنجان

۲. دانشیار دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه

مفهوم «جهان‌های ممکن»، کلید اصلی برای حل مسائل مربوط به اعتبار و عدم اعتبار و ابزار بسیار مناسبی برای بررسی نظام‌های گوناگون منطق موجهات است و ایده ابتدایی آن را لاینیتز، در قرن هجدهم، طرح کرد و کریپکی، در سال ۱۹۵۹، آن را عملیاتی ساخت. مفهوم «وضعیت‌های ممکن» را، نیز، خود کریپکی، در سال ۱۹۶۵، معرفی نمود. نهایتاً، در سال ۱۹۷۳، ریچارد روتلی و روبرت مایر، مفهوم «جهان‌های ناممکن» را در حل پارادوکس‌های استلزام مادی و استلزام اکید به کار بردند. به کمک این مفاهیم جدید، منطق ربط، که خود را رقیب منطق جدید معرفی می‌کرد و برای خود، نحو و نظریه برهان گسترده‌ای فراهم آورده بود، توانست خود را به سلاح سمانتیک تجهیز کند و در کشمکش با منطق جدید به دفاع از کیان خود پردازد.

یکی از ایرادهایی که به این سمانتیک وارد بود این است که این سمانتیک، میان قضایا و قواعد، شکافی عمیق ایجاد می‌کند: در این سمانتیک، قضایا، در جهان‌های منطقی، معتبرند اما قواعد در وضعیت‌ها اعتبار دارد. این در حالی است که در منطق موجهات، قضایا و قواعد، هر دو، در جهان‌های ممکن معتبرند. مایر در سال ۱۹۷۴ نظامی، به نام R^f طراحی کرد که قضایا و قواعد آن، هر دو، در مجموعه وضعیت‌ها معتبر بودند. یکی از اهداف مایر در طراحی این نظام، ابطال ربط‌گرایی و نشان دادن سازگاری میان منطق جدید و منطق ربط بود. نونل بلنپ و مایکل دان در سال‌های ۱۹۸۱ و ۱۹۹۲ تردید خود را نسبت به کامیابی مایر در سازگار نمودن دو منطق رقیب و ناخشنودی‌شان را از نظام مایر ابراز کردند.

به نظر ما، طراحی نظامی منطقی که قضایا و قواعد آن، هر دو، در جهان‌های ممکن معتبر باشند بهتر می‌تواند به سازگاری منطق جدید و منطق ربط بینجامد. در این مقاله، بر پایه منطق ربط R ، نظامی منطقی به نام PWR را طراحی کرده‌ایم. نشان می‌دهیم که قضایا و قواعد PWR، هر دو، در جهان‌های ممکن معتبرند.

از آنجا که PWR بر پایه منطق ربط R ساخته می‌شوند لازم است که یک معرفی اجمالی در ابتدا صورت بگیرد. بخش اول مقاله را به این معرفی اختصاص داده‌ایم. اطلاعات بیشتر را می‌توان در کتاب فلسفه منطق ربط اثر استیون رید که در سال ۱۳۸۵ به فارسی برگردانده شده

است یافت. اهمیت منطق R در این است که دو ادات شرطی دارد: ادات استلزام ربطی \rightarrow و ادات استلزام مادی \supset (این تفکیک، با کمی تفاوت، مشابه تفکیک شرطی متصل لزومی و اتفاقی در منطق قدیم است). ادات \rightarrow ، ادات اصلی و تعریف نشده است و اصول موضوعه و قواعد ویژه خود را دارد و ادات \supset به کمک ادات های \vee و \sim تعریف می شوند و احکام خود را از احکام آن دو ادات به دست می آورد.

اثبات اعتبار قواعد PWR در جهان های ممکن، که در بخش دوم به آن پرداخته ایم، در چهار مرحله صورت می گیرد:

الف: تعریف دو ادات جدید برای صدق و کذب؛

ب: تعریف نوعی شرطی ضمیر به کمک این ادات صدق و کذب؛

ج: اثبات هم ارزی میان قواعد PWR و قضایای این شرطی ضمیر در منطق R؛

د: اثبات هم ارزی میان اعتبار قضایای شرطی ضمیر در R و صدق نگهداری در جهان های ممکن.

اثبات اعتبار قضایای PWR در جهان های ممکن، نیز مبحثی است که در بخش سوم به آن پرداخته ایم.

بخش اول

زبان منطقی

واژگان: متغیرهای گزاره ای، \rightarrow ، \wedge ، \vee ، \sim ، \exists

قواعد ساخت:

همه متغیرهای گزاره ای فرمول اند،

اگر A و B فرمول باشند $(A \rightarrow B)$ و $(A \wedge B)$ و $(A \vee B)$ و $\sim A$ فرمول اند.

اگر A فرمول و p متغیر گزاره ای باشد $\forall p A$ و $\exists p A$ فرمول اند.

به جز موارد بالا، هیچ عبارتی، فرمول نیست.

در فرازبان، قراردادهایی انجام می دهیم که در بیان قواعد به کار می آیند: اگر A و B فرمول

و p و q متغیر گزاره ای باشند $A(p)$ و $A(q/p)$ و $A(B/p)$ و $A(q//p)$ و $A(B//p)$ فرمول اند. در

توضیح، نکات زیر باید مورد توجه قرار بگیرد:

مقصود از $A(p)$ فرمولی است که متغیر گزاره‌ای p دست کم، یک بار، در آن به کار رفته است.

مقصود از $A(q/p)$ فرمولی حاصل از قرار دادن متغیر گزاره‌ای q به جای همه موارد p در $A(p)$ است، مشروط به اینکه p در $A(p)$ در دامنه سور با متغیر q نباشد.

مقصود از $A(q//p)$ فرمولی حاصل از قرار دادن متغیر گزاره‌ای q به جای همه یا بعضی موارد p در $A(p)$ است، مشروط به اینکه p در $A(p)$ در دامنه سور با متغیر q نباشد.

مقصود از $A(B/p)$ فرمولی حاصل از قرار دادن فرمول B به جای همه موارد p در $A(p)$ است، مشروط به اینکه p در $A(p)$ در دامنه سور با متغیرهای موجود در B نباشد.

مقصود از $A(B//p)$ فرمولی حاصل از قرار دادن فرمول B به جای همه یا بعضی موارد p در $A(p)$ است، مشروط به اینکه p در $A(p)$ در دامنه سور با متغیرهای موجود در B نباشد.

تعاریف:

$(A \circ B) =_{تع} \sim (A \rightarrow \sim B)$	تلفیق
$(A + B) =_{تع} (\sim A \rightarrow B)$	تفریق
$(A \supset B) =_{تع} (\sim A \vee B)$	شرطی مادی
$(A \equiv B) =_{تع} (A \supset B) \wedge (B \supset A)$	دوشرطی مادی
$(A \leftrightarrow B) =_{تع} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	دوشرطی ربطی

$T =_{تع} \exists p p$	عملگر صدق چرچ
$F =_{تع} \forall p p$	عملگر کذب چرچ
$t =_{تع} \forall p (p \rightarrow p)$	عملگر صدق آکرمان
$f =_{تع} \sim \forall p (p \rightarrow p)$	عملگر کذب آکرمان

به زودی، نوع دیگری از عملگر صدق و کذب را معرفی خواهیم کرد.

توجه کنید که معرفی سورهای گزاره‌ای در زبان موضوعی، به نوعی، ما را درگیر منطق مرتبه دوم می‌سازد. نه آن معرفی و نه این درگیری، برای مباحث طرح شده در این مقاله، ضرورتی ندارند. دلیل ذکر این سورها، تعریف عملگرهای صدق و کذب است که ستون خیمه

این مقاله را تشکیل می‌دهد. با این حال، همه احکام مربوط به عملگرهای صدق و کذب را می‌توان به جای تعریف به کمک سوره‌های گزاره‌ای، با بیان اصول موضوعه مناسب و بدون استفاده از سوره‌های گزاره‌ای و منطق مرتبه دوم، بیان کرد. تنها حسن معرفی سوره‌های گزاره‌ای در اینجا و تعریف ادات‌های صدق و کذب به کمک آنها، این است که فهم این عملگرها به کمک سوره‌های گزاره‌ای، بسیار آسان‌تر از فهم آنها به کمک اصول موضوعه است.

نظریه برهان R

اصول موضوعه و قواعد بخش گزاره‌ها:

I	$A \rightarrow A$	همانی	
C	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$	جایگشت	
B	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$	تعدی (پیشوند)	شرطی:
W	$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	انقباض	
MP	$\vdash A, \vdash A \rightarrow B \Rightarrow \vdash B$	قاعده وضع مقدم	
$\wedge E$	$(A \wedge B) \rightarrow A$ $(A \wedge B) \rightarrow B$	حذف عاطف	
$\wedge I$	$[(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \wedge C)]$	معرفی ضعیف عاطف	عاطف:
Ad	$\vdash A, \vdash B \Rightarrow \vdash A \wedge B$	قاعده پیوند	Adjunction
$\vee I$	$A \rightarrow (A \vee B)$ $B \rightarrow (A \vee B)$	معرفی فاصل	
$\vee E$	$[(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \vee B) \rightarrow C]$	حذف ضعیف فاصل	فاصل:
Dis	$(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$	پخش‌پذیری ضعیف	Distribution
Con	$(\sim A \rightarrow \sim \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)$	عکس نقیض (اصل بیکن)	ناقض:

اصول موضوعه و قواعد بخش سوره‌های گزاره‌ای:

1	$\forall p A \rightarrow A (B/p)$	حذف \forall	
2	$\forall p (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall p B)$	مشروط به این که A فاقد p آزاد باشد	معرفی \forall
3	$\forall p (A \supset B) \rightarrow (A \supset \forall p B)$	مشروط به این که A فاقد p آزاد باشد	معرفی مادی \forall
3	$\forall p (A \vee B) \rightarrow (A \vee \forall p B)$	مشروط به این که A فاقد p آزاد باشد	تحدید \forall

$\frac{\vdash A(q/p)}{\vdash \forall p A}$	قاعده تعمیم
1 $A(B/p) \rightarrow \exists p A$	معرفی \exists
2 $\forall p (A \rightarrow B) \rightarrow (\exists p A \rightarrow B)$	حذف \exists مشروط به این که B فاقد p آزاد باشد
3 $\forall p (A \supset B) \rightarrow (\exists p A \supset B)$	مشروط به این که B فاقد p آزاد باشد
3 $(A \wedge \exists p B) \rightarrow \exists p (A \wedge B)$	تحدید مشروط به این که A فاقد p آزاد باشد

سمانتیک R

ساختار

در سمانتیک منطق ربط R، ساختار (Frame) یک چهارتایی مرتب $(S, g, R, *)$ است که آن را غالباً با F نشان می دهند. اکنون به توضیح هر یک از اجزای ساختار می پردازیم:

S، مجموعه وضعیت ها

S عبارت است از تعدادی وضعیت یا موقعیت (situation, set-up) که می توانند ممکن یا غیر ممکن، و جهان یا جزء جهان باشند. مجموعه وضعیت ها را غالباً با K نشان می دهند ولی ما برای هماهنگی اسم با مسما آن را S نامیده ایم.

g، یک جهان منطقی

در این سمانتیک، وجود حداقل یک جهان منطقی لازم است تا بتوان قضایای منطقی را در آن اثبات کرد. این جهان را غالباً g می نامند. (در سمانتیک های دارای چند جهان منطقی، یکی از آن ها را به دلخواه می توان برگزید و g نامید.) واضح است که g نیز یک وضعیت است و لذا $g \in S$.

R، یک رابطه سه موضعی

R رابطه ای سه موضعی است که رابطه استنتاج میان وضعیت ها را نشان می دهد. وضعیت های x و y و z رابطه R را دارند اگر و تنها اگر x و y، با هم، مستلزم z باشند.

برای بیان قواعد ساختار، غالباً، یک رابطه چهارموضعی R را به صورت زیر تعریف می کنند:

$$Rabcd = \exists x (Rabx \wedge Rxcd)$$

مفهوم این رابطه چهارموضوعی این است که سه موضع اول، با هم، موضع چهارم را نتیجه می‌دهند: وضعیت‌های x و y و z و w رابطه R را دارند اگر و تنها اگر x و y و z با هم، مستلزم w باشند. بنا به تعریف، $Rxyzw$ یعنی x و y ، با هم، نتیجه‌ای می‌دهد و آن نتیجه z ، با هم، w را نتیجه می‌دهند. آشکار است که این تعریف، معادل است با این عبارت ساده‌تر که x و y و z ، با هم، مستلزم w هستند. (به همین صورت، می‌توان R های چندموضوعی دیگر را تعریف کرد.)

*، ستاره روتلی

ستاره روتلی رابطه‌ای است میان وضعیت‌ها و هم‌تاهایشان. (هم‌تای یک وضعیت، بزرگ‌ترین وضعیتی است که هیچ یک از گزاره‌های آن وضعیت را انکار نمی‌کند). هر وضعیت یک و فقط یک وضعیت هم‌تا دارد و به همین دلیل، ستاره روتلی یک تابع است. اگر a یک وضعیت باشد a^* هم‌تای آن است. چنان که خواهیم دید a نیز هم‌تای a^* است (یعنی $a=a^{**}$). در منطق کلاسیک وجهی، برای تعیین ارزش نقیض یک فرمول از قاعده زیر استفاده می‌کنیم:

نقیض یک فرمول در یک جهان ممکن صادق است اگر و تنها اگر خود آن فرمول در آن جهان صادق نباشد (یعنی کاذب باشد).

در منطق ربط نیز همین قانون برقرار است جز این‌که به جای یکی از دو مورد «جهان ممکن» هم‌تای آن را باید قرار داد:

نقیض یک فرمول در یک وضعیت صادق است اگر و تنها اگر

خود آن فرمول در هم‌تای آن وضعیت صادق نباشد (یعنی کاذب باشد).

از آن‌جا که هم‌تا یک تابع دو سویه است شرط صدق فوق را به صورت زیر نیز می‌توان

نوشت:

نقیض یک فرمول در هم‌تای یک وضعیت صادق است اگر و تنها اگر

خود آن فرمول در آن وضعیت صادق نباشد (یعنی کاذب باشد).

شرایط ساختار

Raaa	۱. انعکاس
Rabc \equiv Rbac	۲. تقارن ۱
Rabcd \equiv Racbd	۳. تقارن ۲
a = a**	۴. تقارن ۳
Rabc \equiv Rac*b*	۵. تقارن ۴

تقارن ۱ و ۲ بیانگر جابجایی موضع‌های غیر آخر R و معادل اصل C و B هستند. تقارن ۳ و ۴ نیز برای نقض مضاعف و عکس نقیض است.

تابع ارزش‌دهی به متغیرها

تابع ارزش‌دهی به متغیرها، در هر وضعیت، به هر متغیر، یکی (و تنها یکی) از دو ارزش صدق و کذب را نسبت می‌دهد و لذا این سمانتیک، سمانتیکی دو ارزشی است و هر فرمول در یک وضعیت یا صادق است یا کاذب.

تابع ارزش‌دهی را با V نشان می‌دهند که به هر متغیر در هر وضعیت یکی از دو ارزش {1,0} را اسناد می‌دهد. به عبارت دیگر، V مجموعه متغیرها و مجموعه وضعیت‌ها را به مجموعه ارزش‌ها می‌نگارد. به زبان صوری:

$$V: \text{Var} \times S \rightarrow \text{Val}$$

$$V: \text{Var(iables)} \times S(\text{ituations}) \rightarrow \text{Val(ues)}$$

$$V: \{P, Q, \dots\} \times \{a, b, c, \dots\} \rightarrow \{1,0\}.$$

اگر مجموعه متغیرهای صادق در وضعیت x با ارزش‌دهی V را با نماد V(x) نشان دهیم

آنگاه شرط زیر، که «شرط توارث» نامیده می‌شوند، برای برخی اهداف مورد نیاز است:

$$Rgxy \text{ اتا } V(x) \subseteq V(y)$$

الگو

الگو یا مدل برابر است با یک ساختار به همراه تابع ارزش‌دهی به متغیرها. به زبان صوری:

$$\text{Model} = (\text{Frame}, \text{Valuation})$$

$$M = (F, V) = (S, g, R, *, V)$$

برای این که بتوان فرمول‌های مرکب را در الگو ارزش‌دهی کرد، باید تابع ارزش‌دهی به متغیرها را به نحوی گسترش داد که شرایط صدق عملگرها تعیین گردد. این شرایط ارزش‌دهی را قواعد ارزش‌دهی نیز می‌نامند و ما ذیلاً به آن می‌پردازیم.

قواعد ارزش‌دهی به فرمول‌ها

قواعد ارزش‌دهی یا شرایط صدق T و F و عملگرهای دو موضعی غیر ربطی مانند \wedge و \vee در وضعیت‌ها به همان صورت هستند که در منطق کلاسیک بودند:

$$\forall w V(T, w) = 1$$

$$\forall w V(F, w) = 0$$

$$V(A \wedge B, w) = 1 \quad \text{اتا} \quad V(A, w) = 1 \wedge V(B, w) = 1$$

$$V(A \vee B, w) = 1 \quad \text{اتا} \quad V(A, w) = 1 \vee V(B, w) = 1$$

اما قواعد ارزش‌دهی t و f نیازمند جهان منطقی g است و قواعد ارزش‌دهی عملگرهای ربطی مانند \rightarrow و \leftrightarrow به رابطه R نیاز دارند:

$$\forall t \quad V(t, w) = 1 \quad \text{اتا} \quad w = g$$

$$\forall f \quad V(f, w) = 0 \quad \text{اتا} \quad w = g^*$$

$$\forall \circ \quad V(A \circ B, w) = 1 \quad \text{اتا} \quad \exists x \exists y (Rxyw \wedge V(A, x) = 1 \wedge V(B, y) = 1)$$

$$V \rightarrow g \quad V(A \rightarrow B, g) = 1 \quad \text{اتا} \quad \forall x [V(A, x) = 1 \supset V(B, x) = 1]$$

$$V \rightarrow \quad V(A \rightarrow B, w) = 1 \quad \text{اتا} \quad \forall x \forall y \{Rwxy \supset [V(A, x) = 1 \supset V(B, y) = 1]\}$$

$$V \leftrightarrow \quad V(A \leftrightarrow B, w) = 1 \quad \text{اتا} \quad \forall x \forall y \{Rwxy \supset [V(A, x) = 1 \supset V(B, y) = 1] \wedge [V(B, x) \supset V(A, y) = 1]\}$$

قواعد ارزش‌دهی f، \sim و \supset نیز نیازمند * است:

$$\forall f \quad V(f, w) = 0 \quad \text{اتا} \quad w = g^*$$

$$V \sim \quad V(\sim A, w) = 1 \quad \text{اتا} \quad V(A, w^*) = 0$$

$$V \sim \quad V(\sim A, w^*) = 1 \quad \text{اتا} \quad V(A, w) = 0$$

$$V \supset \quad V(A \supset B, w) = 1 \quad \text{اتا} \quad V(A, w^*) = 1 \supset V(B, w) = 1$$

$$V \supset \quad V(A \supset B, w) = 1 \quad \text{اتا} \quad V(A, w^*) = 0 \vee V(B, w) = 1$$

تعریف اعتبار در الگوی M :

فرمول A معتبر است اتا در g از آن الگو صادق باشد

استدلال $B \Rightarrow A$ معتبر است اتا در g از آن الگو صادق باشد

یعنی $\forall x [V(B, x) = 1 \supset V(A, x) = 1]$

استدلال معتبر است اتا در g از آن الگو صادق باشد

یعنی $\forall x [V(B_1 \circ \dots \circ B_n, x) = 1 \supset V(A, x) = 1]$ $B_1; \dots; B_n \Rightarrow A$

یعنی برای هر x_1, \dots, x_n و x

$$[R_{x_1 \dots x_n} \wedge V(B_1, x_1) = 1 \wedge \dots \wedge V(B_n, x_n) = 1] \supset V(A, x) = 1$$

استدلال معتبر است اتا در g از آن الگو صادق باشد یعنی

$\forall x \{V(B_1, x) = 1 \wedge \dots \wedge V(B_n, x) = 1\} \supset V(A, x) = 1$ $B_1, \dots, B_n \Rightarrow A$

نکته‌ای که در این تعریف‌ها حائز اهمیت است این است که «صدق $B \rightarrow A$ در g » معادل فرمولی است که فاقد رابطه سه موضعی R است: $\forall x [V(B, x) = 1 \supset V(A, x) = 1]$. با داشتن این هم‌ارزی، اثبات سمانتیکی استدلال‌ها بی‌نیاز از جهان ممکن g خواهد شد. هم‌چنین، قضیه $A \Rightarrow B$ معادل استدلال $A \Rightarrow B$ خواهد گشت و لذا برهان آن نسبتاً ساده‌تر و بی‌نیاز از جهان ممکن g می‌گردد.

تعریف اعتبار در ساختار و منطق

یک فرمول یا استدلال در یک ساختار R معتبر است اتا در همه الگوهای آن معتبر باشد.

یک فرمول یا استدلال در منطق R معتبر است اتا در همه الگوها معتبر باشد.

بخش دوم

نظریه برهان PWR

$S \vdash_{PWR} B$ اتا دنباله‌ای از فرمول‌ها مانند A_1, \dots, A_n وجود داشته باشد که $A_n = B$ و

هر A_i یکی از موارد زیر است:

عضو S است،

W است،

با وضع مقدم، از یک فرمول قبل، و یک قضیه منطق ربط، به دست آمده است،

با وضع مقدم، از فرمول‌های قبل به دست آمده است،

با معرفی عاطف، از فرمول‌های قبل به دست آمده است،

با قیاس انفصالی، از فرمول‌های قبل به دست آمده است.

با تعمیم، از یک فرمول قبل به دست آمده است.

W که در مورد (۲) آمده نوع جدیدی از صدق است که در بخش بعد، به شرح آن پرداخته‌ایم.

انواع صدق و کذب

انواع دوگانه صدق و دو نوع کذب در برابر آنها را پیش‌تر، در بخش زبان منطقی، تعریف

کردیم. دو تعریف زیر برای دو عملگر صدق و کذب از نوعی جدید، برای اولین بار، در این

مقاله، معرفی می‌شوند:

$$\forall p (p \supset p) \text{ تع } W = 010$$

عملگر صدق توتولوژی

$$\forall p (p \wedge \sim p) \text{ تع } I = 011$$

عملگر کذب تناقض

می‌توان به جای W و I، از نمادهای آشنا تر T و \perp که برای عملگرهای صدق و کذب

به کار رفته‌اند استفاده کرد اما از آنجا که این دو عملگر، چنان که خواهیم دید، رابطه تنگاتنگی با

مفهوم «جهان» و مفهوم «غیرممکن» (world و impossible) دارند، در اینجا نمادهای یادآور را

بر نمادهای آشنا ترجیح داده‌ایم. (افزون بر این، در نوشتار غیرتایپی، تفکیک میان T و \perp بسیار

دشوار است.) شباهت و تفاوت میان انواع صدق و کذب را به صورت زیر می‌توان نشان داد:

انواع صدق			
منطقی (صدق آکرمان)	t =	تع $\forall p (p \rightarrow p) =$	$\forall p (p \vee \sim p)$
جهانی (صدق توتولوژی)	W =	تع $\forall p (p \supset p) =$	$\forall p (p \vee \sim p)$
مادی (صدق چرچ)	T =	تع $\forall p (p \sqsupset p) =$	$\forall p (p \vee \neg p) =$ $\exists p p$

انواع کذب	
منطقی (کذب آکرمان)	$f = \text{تع } \exists p (p \circ \sim p)$
جهانی (کذب توتولوژی)	$I = \text{تع } \exists p (p \wedge \sim p)$
مادی (کذب چرچ)	$F = \text{تع } \exists p (p \wedge \neg p) = \text{تع } \forall p p$

نمادهای \neg و \exists نوع جدیدی از نقض و شرطی مادی است که به «نقض بولی» و «شرطی مادی بولی» شناخته می‌شوند و در منطق ربط کلاسیک مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. شرح این دو ادات، فراتر از مباحث طرح شده در این مقاله است و ما آن را تنها برای نشان دادن اینکه میان این سه نوع صدق و کذب، شباهت‌ها و تفاوت‌هایی هست آورده‌ایم. برای توضیح بیشتر، به رستال ۲۰۰۰ مراجعه کنید.

اگر بخواهیم W را تعریف نشده و جزء واژگان اصلی در نظر بگیریم اصول موضوعه W

عبارتند از:

$$\vdash W$$

$$\vdash W \rightarrow p \vee \sim p$$

و I را می‌توان مستقیماً به نقیض W تعریف کرد یا اصل موضوع زیر:

$$\vdash I \leftrightarrow \sim W$$

یا دو اصل زیر:

$$\vdash \sim I$$

$$\vdash p \wedge \sim p \rightarrow I$$

را برای آن ذکر کرد.

ادات‌های W و I ، خواص بسیار مهمی دارند. مهم‌ترین ویژگی W این است که W ، در منطق R ، مستلزم همه توتولوژی‌های منطق کلاسیک، بلکه معادل ترکیب عطفی همه آنها است. مقصود از توتولوژی منطق کلاسیک، همه قضایای منطق ربط است که در آن، تنها عملگرهای عاطف، فاصل و ناقض، به کار رفته باشد و نیز، همه نمونه‌جانشین‌های این قضایا.

از سوی دیگر، همه تناقض‌های کلاسیک (= نقیض توتولوژی‌های کلاسیک) مستلزم I

هستند بلکه I معادل ترکیب فصلی همه تناقض‌های کلاسیک است.

این در حالی است که t ، در منطق R ، مستلزم همه قضایای منطق ربط، بلکه معادل

ترکیب عطفی همه آنها است. از سوی دیگر، نقیض قضایای منطق ربط، مستلزم f هستند بلکه f معادل ترکیب فصلی نقیض همه قضایای منطق ربط است.

شرطی ضمیر

در R ، می توان نوعی شرطی ضمیر تعریف کرد که ما آن را «شرطی دوزمیر» نامیده، نماد \gg را برای آن به کار می بریم:

$$A \gg B =_{\text{تع}} (A \wedge W) \rightarrow (B \vee I) \quad \text{شرطی دوزمیر}$$

این شرطی احکامی دارد که در زیر به برخی از آنها می پردازیم:

این شرطی، ضعیف تر از شرطی ربطی است، به این معنا که

$$\vdash_R (A \rightarrow B) \rightarrow (A \gg B) \quad \not\vdash_R (A \gg B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

اما با شرطی مادی نسبتی ندارد:

$$\not\vdash_R (A \supset B) \rightarrow (A \gg B) \quad \not\vdash_R (A \gg B) \rightarrow (A \supset B)$$

و قضیه های دوزمیر، قوی تر از قضیه های مادی هستند، به این معنا که

$$\text{If } \vdash_R A \gg B \text{ Then } \vdash_R A \supset B$$

استدلال PWR معتبر = قضیه دوزمیر

$$\vdash_R (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \gg B \quad \text{اگر } A_1, \dots, A_n \vdash_{\text{PWR}} B$$

کافی است حکم زیر را اثبات کنیم:

$$A \vdash_{\text{WR}} B \quad \text{اگر } \vdash_R A \gg B$$

پس باید نشان دهیم که

اگر $A \gg B$ قضیه R باشد آنگاه برهانی برای استنتاج B از A در PWR داریم و اگر برهانی برای استنتاج B از A در PWR داشته باشیم آنگاه $A \gg B$ قضیه R است.

برهان ۱: اگر $A \gg B$ قضیه R باشد برهانی در R دارد که با افزودن دنباله زیر به آن، به برهانی برای استنتاج B از A در PWR تبدیل می شوند:

$$A, W, A \wedge W, B \vee I, \sim I, B$$

برهان ۲: استقرا روی طول برهان در PWR.

گام نخست: اگر برهان استدلال در PWR، دنباله ای تک عضوی باشد آنگاه آن عضو برابر

است با B و یکی از دو حالت زیر برای آن برقرار است:

یا B همان A است که در این صورت، $A \gg B$ به دلیل قضیه بودن $A \gg A$ قضیه است زیرا (\gg از \rightarrow ضعیف‌تر است و از آن نتیجه می‌شوند).
یا B همان W است که در این صورت، $A \gg B$ قضیه است زیرا:

$$\vdash A \wedge W \rightarrow W \vee I$$

$$\vdash A \gg W$$

$$\vdash A \gg B$$

فرض استقرا: حکم برای استدلال‌های دارای برهانی به طول کمتر از n برقرار است.

اکنون، حکم را برای استدلال‌های دارای برهانی به طول n اثبات می‌کنیم: فرمول n ام برهان، یا اصل موضوع است یا یکی از مقدمات، (که مانند آنچه در گام نخست گذشت، حکم برقرار خواهد بود)، یا با یکی از قواعد دوگانه از فرمول‌های قبل به دست آمده است: B با وضع مقدم از یک فرمول قبلی و یک قضیه R به دست آمده است؛ در این صورت، یکی از دو حالت زیر برقرار است:

B از یک فرمول قبلی مانند C و یک قضیه مانند $C \rightarrow B$ به دست آمده است؛ بنا به

فرض استقرا، حکم برای فرمول اول برقرار است. بنا به فرض استقرا، خواهیم داشت:

$$\vdash C \rightarrow B$$

$$\vdash A \gg C$$

از این دو مقدمه، نتیجه را به صورت زیر می‌توان استنتاج کرد:

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (C \vee I)$$

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (B \vee I)$$

$$\vdash A \gg B$$

B از یک فرمول قبلی مانند $C \rightarrow B$ و یک قضیه مانند C به دست آمده است؛ بنا به

فرض استقرا، حکم برای فرمول اول برقرار است. بنا به فرض استقرا، خواهیم داشت:

$$\vdash A \gg (C \rightarrow B)$$

$$\vdash C$$

از این دو مقدمه، نتیجه را به صورت زیر می‌توان استنتاج کرد:

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (C \rightarrow B) \vee I$$

$$\vdash C \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow B)$$

$$\vdash (C \rightarrow B) \rightarrow B$$

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow B \vee I$$

$$\vdash A \gg B$$

B با وضع مقدم از دو فرمول قبلی، مانند C و $C \rightarrow B$ به دست آمده است؛ بنا به فرض استقرا، حکم برای این دو فرمول برقرار است. بنا به فرض استقرا، خواهیم داشت:

$$\vdash A \gg (C \rightarrow B)$$

$$\vdash A \gg C$$

از این دو مقدمه، نتیجه را به صورت زیر می‌توان استنتاج کرد:

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (C \rightarrow B) \vee I$$

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow C \vee I$$

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow [((C \rightarrow B) \vee I) \wedge (C \vee I)]$$

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow [(C \rightarrow B) \wedge C] \vee I$$

$$\vdash [(C \rightarrow B) \wedge C] \rightarrow B$$

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (B \vee I)$$

$$\vdash A \gg B$$

B با معرفی عاطف از دو فرمول قبلی، مانند C و D به دست آمده است؛ بنا به فرض

استقرا، حکم برای این دو فرمول برقرار است. بنا به فرض استقرا، خواهیم داشت:

$$\vdash A \gg C$$

$$\vdash A \gg D$$

از این دو مقدمه، نتیجه را به صورت زیر می‌توان استنتاج کرد:

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow C \vee I$$

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow D \vee I$$

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (C \vee I) \wedge (D \vee I)$$

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (C \wedge D) \vee I$$

$$\vdash A \gg (C \wedge D)$$

$$\vdash A \gg B$$

B با قیاس انفصالی از دو فرمول قبلی، مانند $\sim C$ و $C \vee B$ به دست آمده است؛ بنا به

فرض استقرا، حکم برای این دو فرمول برقرار است. بنا به فرض استقرا، خواهیم داشت:

$$\vdash A \gg (C \vee B)$$

$$\vdash A \gg \sim C$$

از این دو مقدمه، نتیجه را به صورت زیر می‌توان استنتاج کرد:

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (C \vee B) \vee I$$

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow \sim C \vee I$$

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow [((C \vee B) \vee I) \wedge (\sim C \vee I)]$$

$$\begin{aligned}
& \vdash (A \wedge W) \rightarrow [(C \vee B) \wedge \sim C] \vee I \\
& \vdash (A \wedge W) \rightarrow [(B \vee C) \wedge \sim C] \vee I \\
& \vdash (A \wedge W) \rightarrow [B \vee (C \wedge \sim C)] \vee I \\
& \vdash (A \wedge W) \rightarrow (B \vee I \vee I) \\
& \vdash (A \wedge W) \rightarrow (B \vee I) \\
& \vdash A \ggg B
\end{aligned}$$

پایان برهان.

تناظر میان انواع صدق و کذب و انواع وضعیت‌ها

از نظر سمانتیکی، قاعده‌های ساده‌ای برای صدق و کذب از نوع چرچ و آکرمان وجود دارد:

t در x صادق است اتا x جهان منطقی باشد؛

f در x صادق است اتا x همتای جهان منطقی باشد؛

T در x صادق است اتا x وضعیت باشد؛

F در x صادق است اتا x وضعیت نباشد؛

t در همه و تنها همه جهان‌های منطقی، صادق است و بنابراین، f در همه و تنها همه

همتا‌های جهان‌های منطقی، کاذب است. این در حالی است که T، در همه وضعیت‌ها، صادق

است و F در همه وضعیت‌ها، کاذب است.

از نظر سمانتیکی، قاعده ساده‌ای برای W وجود دارد:

W در x صادق است اتا x جهان باشد؛

اکنون، با این قاعده، می‌توان قاعده I را نیز به دست آورد:

W در x* صادق است اتا x* جهان باشد؛ پس

W در x* صادق است اتا x همتای یک جهان باشد؛ پس

W در x* صادق است اتا x یک وضعیت ممکن باشد؛ پس

W در x* صادق نیست اتا x یک وضعیت ممکن نباشد؛ پس

W در x* کاذب است اتا x یک وضعیت غیرممکن باشد؛ پس

W در x صادق است اتا x یک وضعیت غیرممکن نباشد؛ پس

I در x صادق است اتا x یک وضعیت غیرممکن باشد.

بنابراین، به دو خاصیت مهم I و W می‌رسیم:

W در همه و تنها همه «جهان‌ها»، صادق است و
 I در همه و تنها همه «وضعیت‌های غیرممکن»، صادق است.
 از این اطلاعات، می‌توان جدول زیر را به دست آورد:

نماد زیر	صادق است در همه و تنها همه	کاذب است در همه و تنها همه
t	وضعیت‌های منطقی	وضعیت‌های غیرمنطقی
W	جهان‌ها	وضعیت‌های ناقص
T	وضعیت‌ها	_____
f	همتا‌های وضعیت‌های غیرمنطقی	همتا‌های وضعیت‌های منطقی
I	وضعیت‌های غیرممکن	وضعیت‌های ممکن
F	_____	وضعیت‌ها

از آنجا که ادات T در هیچ وضعیتی کاذب نیست و ادات F در هیچ وضعیتی صادق نیست، دو بخش از جدول، معادل کذب T و صدق F، خالی مانده است. اکنون، با توجه به این جدول، می‌توانیم اعتبار یک فرمول یا استدلال را نسبت به هر یک از مفاهیم سمانتیکی ستون سمت راست، تنها به کمک قضایای R، نشان دهیم.

A قضیه منطقی ربط R است اتا در همه «وضعیت‌های منطقی» از هر الگو و هر ساختار از سمانتیک مربوط، صادق باشد. همچنین، فرمول A، فرمول B را در منطقی ربط R نتیجه می‌دهد (به عبارتی دیگر، شرطی $A \rightarrow B$ در R قضیه است) اتا انتقال از A به B در همه «وضعیت‌ها» از هر الگو و هر ساختار از سمانتیک مربوط، صدق‌نگهدار باشد؛ یعنی در هر «وضعیت»، اگر A صادق است B نیز در آن صادق باشد. پس قضایای R، نشانگر اعتبار در همه «وضعیت‌های منطقی» هستند در حالی که قضایای شرطی در R، نشانگر صدق‌نگهداری در همه «وضعیت‌ها» می‌باشند.

شرطی دوضمیر و جهان‌های ممکن

با استفاده از سمانتیک منطقی ربط، می‌توان نشان داد که معتبر بودن شرطی دوضمیر معادل صدق‌نگهداری در جهان‌های ممکن است:

$\models A \ggg B$	اتا	$\models A \wedge W \rightarrow B \vee I$
$\models A \ggg B$	اتا	در هر وضعیتی که $A \wedge W$ صادق است $B \vee I$ نیز صادق است
$\models A \ggg B$	اتا	در هر وضعیتی که A و W صادق است، یا B صادق است یا I صادق است
$\models A \ggg B$	اتا	در هر جهان که در آن، A صادق است، یا B صادق است یا صادق است
$\models A \ggg B$	اتا	در هر جهان که در آن، I ، کاذب و A صادق است، B صادق است
$\models A \ggg B$	اتا	در هر جهان ممکن که A صادق است B نیز صادق است
$\models A \ggg B$	اتا	در هر جهان ممکن، انتقال از A به B صدق‌نگهدار است
$\models A \ggg B$	اتا	صدق‌نگهداری در جهان‌های ممکن

منطق PWR و جهان‌های ممکن

با استفاده از سمانتیک منطق ربط، می‌توان نشان داد که قواعد PWR، در جهان‌های ممکن، صدق‌نگهدارند:

$A \vdash_{PWR} B$	اتا	$\vdash_R A \ggg B$	استدلال PWR معتبر = قضیه دوزمیر
$A \vdash_{PWR} B$	اتا	$\models A \ggg B$	صحت و تمامیت منطق R
$A \vdash_{PWR} B$	اتا	صدق‌نگهداری در جهان‌های ممکن	شرطی دوزمیر و جهان‌های ممکن

بخش سوم

قضایای منطق PWR همان استدلال‌های بدون مقدمه‌ای هستند که اثبات شده‌اند. می‌توان نشان داد که قضایای PWR همان نتایج T در PWR هستند:

$$T \vdash_{PWR} B \quad \text{اتا} \quad \vdash_{PWR} B$$

(برهان راست به چپ: واضح است؛

برهان چپ به راست: اگر B در PWR از T نتیجه شده باشد برهانی دارد که با افزودن W به آغاز آن، به برهانی برای B بدون مقدمه تبدیل خواهد شد زیرا $W \rightarrow T$ قضیه R است. پایان برهان.)

از آنجا که در بخش‌های پیشین، اثبات کردیم که

$$A \vdash_{\text{PWR}} B \quad \text{اتا} \quad \models A \ggg B \quad \text{اتا} \quad \models A \wedge W \rightarrow B \vee I$$

نتیجه می‌گیریم که

$$T \vdash_{\text{PWR}} B \quad \text{اتا} \quad \models T \ggg B \quad \text{اتا} \quad \models T \wedge W \rightarrow B \vee I$$

$$T \vdash_{\text{PWR}} B \quad \text{اتا} \quad \models T \ggg B \quad \text{اتا} \quad \models W \rightarrow B \vee I$$

$$\vdash_{\text{PWR}} B \quad \text{اتا} \quad \models T \ggg B \quad \text{اتا} \quad \models W \rightarrow B \vee I$$

اما قبلاً ثابت کردیم که

$\models A \ggg B$ اتا در هر جهان ممکن که A صادق است B نیز صادق است
بنابراین، داریم:

$\models T \ggg B$ اتا در هر جهان ممکن که T صادق است B نیز صادق است

$\models T \ggg B$ اتا در هر جهان ممکن، B صادق است

در نتیجه،

$\vdash_{\text{PWR}} B$ اتا در هر جهان ممکن، B صادق است

و این یعنی قضایای PWR، مانند قواعد آن، در جهان‌های ممکن معتبرند.

منابع

۱. رید، استیون، فلسفه منطق ربط، اسداله فلاحی، قم، انتشارات دانشگاه مفید؛ (۱۳۸۵)
2. Belnap, N. D. & J. M. Dunn, 1981, "Entailment and the Disjunctive Syllogism", *Contemporary Philosophy: a new survey*, vol. I, ed. G. floistad and G. H. von Wright, The Hague ; Also: *Philosophy of language/Philosophical logic*, ed. G. Fløistad and G. H. von Wright, The Hague (Martinus Nijhoff), 337-366.
3. Kripke, S., 1959, 'A Completeness Theorem in Modal Logic', *Journal of Symbolic Logic* 24 (1959), 1-14.
4. Kripke, S., 1963a, 'Semantical Analysis of Modal Logic I, Normal Propositional Calculi', *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 9 (1963), 67-96.
5. Kripke, S., 1963b, 'Semantical Considerations on Modal Logics', *Acta Philosophica Fennica* (1963) *Modal and Many-Valued Logics*, 83-94.
6. Kripke, S., 1965, 'Semantical Analysis of Modal Logic II, Non-Normal Modal Propositional Calculi', *The Theory of Models* ed. J. W. Addison, L. Henkin, A. Tarski, Amsterdam, 1965, 206-20.
7. Meyer, R. K., 1974, "New axiomatics for relevant logics - I". *Journal of*

- Philosophical Logic, 3: 53-86.
8. Read, Stephen, 1988, *Relevant Logic*. Basil Blackwell, Oxford.
 9. Restall, Greg, 2000, *An Introduction to Substructural Logics*. London and New Yourk, Routledge.
 10. Routley, F. R. & Meyer, 1972, "The semantics of entailment (II)", *Journal of Philosophical Logic*, 1
 11. Routley, F. R. & Meyer, 1972, "The semantics of entailment (III)", *Journal of Philosophical Logic*, 1: 192-208
 12. Routley, F. R. & Meyer, 1973, "Semantics of Entailment". In Hugues Leblanc, editor, *Truth Syntax and Modality*, pages 194-243. North Holland, 1973. *Proceedings of the Temple Iniversity Conference on Alternative Semantics*.